

2.5.3 Doplnění na čtverec II

Předpoklady: 020502

Pedagogická poznámka: Když na začátku hodiny procházíme shrnutí hodiny předchozí, upozorňuji i na to, že všechny příklady nebyly stejné a řešení příkladů je možné vnímat jako chůzi pro třech schodem: základní typ, typ s číslem navíc, typ s obtížnějším vytýkáním.

Pedagogická poznámka: První příklad používám jako písemku ověřující, zda si všichni dopočítali obsah předchozí hodiny.

Př. 1: Uprav předpisy zadaných kvadratických funkcí doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = x^2 + 6x$

b) $y = x^2 - 4x - 2$

c) $y = x^2 - x + 1$

a) $y = x^2 + 6x = x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2 - 3^2 = (x + 3)^2 - 9$

b) $y = x^2 - 4x - 2 = x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2 - 2 = (x - 2)^2 - 6$

c) $y = x^2 - x + 1 = x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$

Př. 2: Uprav kvadratickou funkci $y = -x^2 + 4x + 2$ doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

Problém: Předpis funkce nezačíná x^2 .

Řešení: Vytkneme mínus před závorku a uvnitř máme to, co už umíme.

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 4x + 2 = -(x^2 - 4x) + 2 = -(x^2 - 2x \cdot 2 + 2^2 - 2^2) + 2 = -[(x - 2)^2 - 4] + 2 = \\ &= -(x - 2)^2 + 4 + 2 = -(x - 2)^2 + 6 \end{aligned}$$

Př. 3: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit její graf.

a) $y = -x^2 - 2x$

b) $y = -x^2 + 5x + 1$

a) $y = -x^2 - 2x = -(x^2 + 2x) = -(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) = -[(x + 1)^2 - 1] = -(x + 1)^2 + 1$

b)

$$\begin{aligned} y &= -x^2 + 5x + 1 = -(x^2 - 5x) + 1 = -\left(x^2 - 2x \cdot \frac{5}{2} + \left(\frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{5}{2}\right)^2\right) + 1 = -\left[\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}\right] + 1 = \\ &= -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{25}{4} + 1 = -\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{29}{4} \end{aligned}$$

Př. 4: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = 2x^2 + 6x + 4$

b) $y = 0,5x^2 + x + 1$

c) $y = -2x^2 + 4x + 7$

Třikrát stejný problém i stejné řešení jako v předchozích příkladech.

a)

$$y = 2x^2 + 6x + 4 = 2(x^2 + 3x) + 4 = 2\left[x^2 + 2x \cdot \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] + 4 = 2\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\right] + 4 =$$

$$= 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{2} + 4 = 2\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$$

b)

$$y = 0,5x^2 + x + 1 = 0,5(x^2 + 2x) + 1 = 0,5(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 1 = 0,5[(x+1)^2 - 1] + 1 =$$

$$= 0,5(x+1)^2 - 0,5 + 1 = 0,5(x+1)^2 + 0,5$$

c)

$$y = -2x^2 + 4x + 7 = -2(x^2 - 2x) + 7 = -2(x^2 - 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 7 = -2[(x-1)^2 - 1] + 7 =$$

$$= -2(x-1)^2 + 2 + 7 = -2(x-1)^2 + 9$$

Pedagogická poznámka: Většina žáků přijde na to, že musí číslo před x^2 vytknout. V bodu a) se objevují dvě hlavní chyby: žáci zapomenou vytknout 2 i ze členu $6x$ chybnou úpravou $2x^2 + 6x = 2(x^2 + 6x)$, nebo při roznásobování závorky na konci

Př. 5: Uprav zadané kvadratické funkce doplněním na čtverec tak, aby bylo možné snadno nakreslit jejich graf.

a) $y = 3x^2 - 4x$

b) $y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1$

c) $y = -4x^2 + 2x - 3$

Opět budeme vytýkat před závorku.

a)

$$y = 3x^2 - 4x = 3\left(x^2 - \frac{4}{3}x\right) = 3\left[x^2 - 2x \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2\right] = 3\left[\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{9}\right] = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}$$

b)

$$y = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x) + 1 = \frac{1}{4}(x^2 + 2x \cdot 1 + 1^2 - 1^2) + 1 = \frac{1}{4}[(x+1)^2 - 1] + 1 =$$

$$= \frac{1}{4}(x+1)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \frac{1}{4}(x+1)^2 + \frac{3}{4}$$

c)

$$\begin{aligned}
 y &= -4x^2 + 2x - 3 = -4\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) - 3 = -4\left(x^2 - 2x \cdot \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2\right) - 3 = -4\left[\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16}\right] - 3 = \\
 &= -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{4} - 3 = -4\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{11}{4}
 \end{aligned}$$

Př. 6: Petáková:

strana 29/cvičení 54 $f_1, f_2, f_4, f_7, f_8, f_9$

Shrnutí: Z kvadratického trojčlenu můžeme vytvořit druhou mocninu tím, že jej doplníme na vzorec $(A \pm B)^2$.